



## ОРИГИНАЛЬНЫЕ СТАТЬИ

УДК: 532.5

MSC 2010: 37J60, 37J35, 70E18, 70F25, 70N45

# Об управлении роботом-шаром при помощи двух омниколес

А. П. Иванов

Обсуждается динамика уравновешенного тела сферической формы на шероховатой плоскости, управляемого при помощи движения встроенной оболочки. Последняя приводится в движение относительно корпуса за счет вращения двух омниколес, расположенных на концах диаметра и имеющих перпендикулярные оси вращения. Показано, что шар можно переместить в любую точку плоскости по прямолинейной или (в случае начального вырождения) ломаной траектории.

Ключевые слова: робот-шар, омниколесо, управление движением

## 1. Введение

Робот-шар представляет собой сферический корпус, внутри которого располагаются движущиеся массы, обеспечивающие качение корпуса. Исследования такой системы восходят к концу XIX века: Бобылевым [1] и Жуковским [2] было показано, что на абсолютно шероховатой плоскости динамика шара, несущего гироскоп, отличается от динамики шара без гироскопа. Примерно в то же время в США было зарегистрировано несколько изобретений, формула которых включает в себя активное движение шара под действием перемещения внутренних масс за счет упругой энергии пружин или мускульной силы пассажира

---

Получено 05 марта 2015 года

После доработки 26 марта 2015 года

---

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (14-01-00432) в рамках выполнения базовой части государственного задания в сфере научной деятельности за № 2014/120.

---

Иванов Александр Павлович  
[arivanov@orc.ru](mailto:arivanov@orc.ru)

Московский физико-технический институт (государственный университет)  
141700, Россия, г. Долгопрудный, Институтский пер., д. 9

(см. обзор [3]). Практическое использование роботов-шаров началось в середине XX века, когда в США появились первые управляемые игрушки, построенные на их основе (см. [4], где содержатся ссылки на предыдущие и последующие аналоги). Впоследствии механизм управления совершенствовался усилиями различных авторов. Было отмечено [5], что используемые кинематические схемы можно разбить на следующие три группы:

- управление при помощи смещения центра масс — к этому типу относятся устройства, несущие маятники или массивные тележки на колесах или полозьях [7–14];
- управление посредством изменения гиростатического момента — в этом случае имеются роторы или маховики с осями вращения, жестко связанными с корпусом [6, 15–19];
- движение осуществляется за счет изменения формы сферической оболочки [20].

Общий недостаток перечисленных механизмов управления — их значительный объем. В настоящее время появляются проекты применения робота-шара для транспортировки грузов и пассажиров в экстремальных условиях бездорожья или агрессивной внешней среды. В связи с этим требуется наличие внутри шара значительного пространства, свободного от попадания в него устройств управления. Кроме того, устройствам первого типа свойственна недостаточная управляемость и ограничения на скорость перемещения. В устройствах второго типа отмечается малая эффективность привода: ряд опытных образцов даже не смогли сдвинуться с места из-за трения качения. Механизмы третьего типа пока кажутся экзотикой.

В данной работе предлагается новый тип управления роботом-шаром, свободный от вышеупомянутых недостатков. Внутри внешнего корпуса располагается сферическая оболочка  $S$  несколько меньшего радиуса, отделенная от корпуса подшипниками 3 (рис. 1а). На оболочке закрепляется система управления движением, а также перевозимый груз. Относительное движение корпуса и оболочки обеспечивается при помощи двух диаметрально противоположных омниколес, которые касаются корпуса в точках  $C_1$  и  $C_2$  и оси которых перпендикулярны диаметру сферы и друг другу. Как известно, такие колеса могут передавать усилие двигателя в направлении, ортогональном оси вращения, но не препятствуют движению вдоль оси [5, 25]. Управление колесами осуществляется за счет двух приводов (блоки 1 и 2). Конструктивно вместо сферической оболочки можно использовать более простую стержневую конструкцию, например, в форме куба. В этом случае колеса располагаются в двух вершинах, а в остальные вершины помещаются подшипники. Система имеет несколько режимов движения:

1. двигатели вращают колеса, при этом оболочке и корпусу сообщаются противоположные моменты, приводящие корпус в движение в соответствии с теоремами динамики (рис. 1а);
2. двигатели отключены, система движется по инерции (рис. 1б);
3. при блокировке колес, закрепленных на оболочке и катящихся по корпусу, происходит резкое торможение оболочки, и весь ее кинетический момент импульсивно передается корпусу (рис. 1с).

В начале движения, а также для преодоления препятствий можно сначала разогнать оболочку, а затем включить тормоз. Подобная идея реализована в 2013 году в Массачусетском технологическом институте для корпуса кубической формы, несущего гиростат [21, 22].

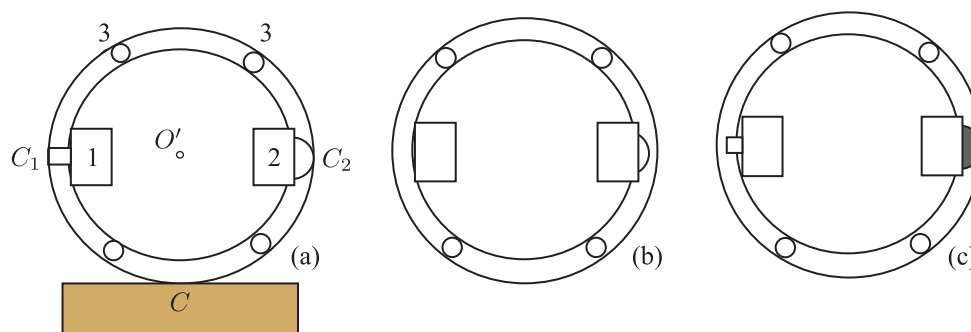


Рис. 1

Заметим, что предлагаемая кинематическая схема может рассматриваться как физический маятник, подвешенный в центре масс. Она обладает рядом преимуществ по сравнению с вышеупомянутым управлением при помощи смещения центра масс (неуравновешенный маятник). К таким преимуществам относятся: наличие большого свободного пространства внутри оболочки, усиление движущего момента двигателя по принципу рычага, отсутствие затрат на перемещение центра масс вдоль вертикали. Кроме того, алгоритмы управления движением существенно упрощаются.

## 2. Уравнения движения

Будем считать корпус устройства однородной сферой радиуса  $R$  и массы  $m$ . Внутренняя оболочка с закрепленной на ней системой управления и транспортируемым грузом рассматривается как твердое тело  $S$ , с которым связана система отсчета  $O'X'Y'Z'$ , оси которой совпадают с главными осями инерции. Для простоты будем считать, что тело динамически симметрично, причем ось симметрии  $O'Z'$  проходит через точки контакта колес с корпусом  $C_1$  и  $C_2$ . Неподвижная система  $OXYZ$  имеет начало на опоре и ось аппликат, направленную вертикально вверх.

Действие моторов приводит внутреннюю оболочку в движение относительно корпуса. Они создают управляющий момент

$$M = M_1 e_1 + M_2 e_2,$$

причем оси вращения колес  $e_j$  фиксированы в теле  $S$ . Не ограничивая общности, можно считать, что  $e_1 \parallel O'X'$ ,  $e_2 \parallel O'Y'$ . Тогда движение тела  $S$  относительно точки  $O'$  описывается динамическими уравнениями Эйлера

$$J_1 \dot{p} + (J_3 - J_1)qr = M_1, \quad J_1 \dot{q} + (J_1 - J_3)pr = M_2, \quad J_3 \dot{r} = 0, \quad (2.1)$$

где  $J_1 > J_3$  — экваториальный и осевой моменты инерции. Движение корпуса относительно центра  $O'$  происходит под действием момента

$$M_k = -M, \quad (2.2)$$

а также момента сил трения. Предполагается, что последние обеспечивают отсутствие скольжения в точке контакта  $C$  за счет горизонтальной составляющей  $F$ . Теорема о движении центра масс всей системы и теорема моментов для корпуса выражаются в инерциальной системе отсчета  $OXYZ$  (ось аппликат направлена вертикально вверх и имеет орт  $\vec{k}$ )

формулами

$$(m_s + m)\dot{v} = \vec{F}, \quad mR^2\dot{\omega} = \vec{M}_k - R\vec{k} \times \vec{F}, \quad \vec{v} = R\vec{\omega} \times \vec{k}, \quad (2.3)$$

где  $v$  — вектор скорости точки  $O'$ , лежащий в горизонтальной плоскости,  $\omega$  — угловая скорость корпуса. Последнее равенство (2.3) означает отсутствие проскальзывания.

Для пересчета момента из связанной системы в инерциальную воспользуемся теорией кватернионов. Пусть  $\Lambda$  — кватернион, задающий конечный поворот, переводящий оси  $OXYZ$  в оси  $OX'Y'Z'$ , тогда

$$M_k = \bar{\Lambda} \circ (-M_1, -M_2, 0) \circ \Lambda, \quad (2.4)$$

где символ « $\circ$ » обозначает кватернионное произведение [23]. В свою очередь,  $\Lambda$  удовлетворяет дифференциальному уравнению Пуассона

$$\dot{\Lambda} = \frac{1}{2} \Lambda \circ \Omega, \quad \Omega = (p, q, r). \quad (2.5)$$

Уравнения (2.2)–(2.5) в замкнутой форме определяют движение рассматриваемой системы в терминах  $v$ ,  $\omega$  и  $\Omega$  для заданной зависимости  $M = M(t)$ . Для их решения вначале рассмотрим систему (2.1). В случае  $M(t) \equiv 0$  мы получим интегрируемый случай Эйлера; при этом общее решение выражается по формулам

$$\begin{aligned} p &= A_1 \cos \sigma t + A_2 \sin \sigma t, \quad q = -A_1 \sin \sigma t + A_2 \cos \sigma t, \quad r = A_3, \\ \sigma &= \frac{J_1 - J_3}{J_1} A_3, \end{aligned} \quad (2.6)$$

где  $A_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ) — произвольные постоянные. В общем случае решение имеет такую же форму, но вместо постоянных оно включает в себя функции времени  $A_j(t)$  (вариация постоянных), определяемые квадратурой из уравнений

$$\dot{A}_1(t) = M_1(t) \cos \sigma t - M_2(t) \sin \sigma t, \quad \dot{A}_2(t) = M_1(t) \sin \sigma t + M_2(t) \cos \sigma t,$$

причем величина  $A_3$  остается постоянной. Заметим, что при рассмотрении управления движением тела  $S$  из состояния покоя следует считать  $A_3 = 0$ ,  $\sigma = 0$ . Тогда

$$p = A_1(t) = \int M_1(t) dt, \quad q = A_2(t) = \int M_2(t) dt. \quad (2.7)$$

Затем численно решаем уравнение (2.5), найденный кватернион подставляем в формулу (2.4) и, наконец, интегрируем систему (2.3). Отметим, что при отключенных связях между корпусом и внутренностью (рис. 1b) система распадается на две интегрируемых задачи: тело  $S$  совершает регулярную прецессию, а корпус движется аналогично однородному шару, катящемуся по горизонтальной плоскости без проскальзывания. При этом точка  $O'$  движется равномерно и прямолинейно, а угловая скорость  $\omega$  постоянна и ортогональна скорости центра масс (не обязательно горизонтальна) [24].

### 3. Управление движением корпуса

Основная функция рассматриваемого мобильного устройства — это его движение по заданной траектории. В рамках сделанных предположений, сила трения  $F$  не ограничена по величине и может обеспечить ускорение, требуемое для следования по любому маршруту, описываемому гладкой линией. В реальной ситуации, когда модуль этой силы ограничен

в соответствии с принятым законом трения, максимальная скорость движения зависит от кривизны траектории. Из системы (2.3) нетрудно найти связь между управляющим моментом и силой  $F$ :

$$M_k \times k = RF \frac{2m + m_s}{m + m_s}. \quad (3.1)$$

Подставляя формулу (2.2) в (3.1), получаем

$$M_1 e_1 \times k + M_2 e_2 \times k = F \frac{2m + m_s}{m + m_s}. \quad (3.2)$$

Векторы  $e_1 \times k$ ,  $e_2 \times k$  и  $F$  горизонтальны, поэтому однозначная разрешимость уравнения (3.2) относительно  $M_1$ ,  $M_2$  равносильна неколлинеарности первых двух из этих векторов. Это условие означает, что ось симметрии тела  $C_1 C_2$  не горизонтальна. Доказано следующее

**Предложение 1.** В случае, когда ось симметрии  $C_1 C_2$  не горизонтальна, при помощи выбора управляющих моментов по формуле (3.2) можно придать центру масс системы ускорение, обеспечивающее движение по любой (гладкой) заданной траектории.

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Задача об управляемости шара с двумя роторами, аналогичная рассматриваемому случаю, обсуждалась в [26]. Получен вывод об отсутствии полной управляемости, что означает невозможность построения пути между некоторыми двумя положениями в конфигурационном пространстве. Последнее включает в себя не только координаты центра шара  $O'$ , но и его ориентацию. Ниже будет показано наличие управляемости по отношению к координатам точки  $O'$ .

#### 4. Движение с одним включенным двигателем

Обсудим частный случай управления движением шара: один из двигателей (к примеру, второй) отключен. При этом управляющий момент подается вдоль оси  $O'X'$ , поэтому в силу (2.6), (2.7) получаем  $q = 0$ , а  $p(t)$  определяется квадратурой. Уравнение Пуассона (2.5) упрощается: для компонент единичного кватерниона  $\Lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$  получаем систему

$$2\dot{\lambda}_0 = -\lambda_1 p, \quad 2\dot{\lambda}_1 = \lambda_0 p, \quad 2\dot{\lambda}_2 = -\lambda_3 p, \quad 2\dot{\lambda}_3 = \lambda_2 p. \quad (4.1)$$

Общее решение системы (4.1) имеет вид

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= B_1 \cos \tau + B_2 \sin \tau, & \lambda_1 &= B_1 \sin \tau - B_2 \cos \tau, \\ \lambda_2 &= B_3 \cos \tau + B_4 \sin \tau, & \lambda_3 &= B_3 \sin \tau - B_4 \cos \tau, \end{aligned} \quad \tau = \frac{1}{2} \int p(t) dt \quad (4.2)$$

с произвольными постоянными  $B_j$ , удовлетворяющими условию нормировки

$$\sum_{j=1}^4 B_j^2 = 1.$$

Начальное положение тела относительно неподвижных осей (при  $t = 0$ ) определяется поворотом на угол  $\varphi_0 = 2 \arccos B_1$  вокруг оси  $l_0 = (-B_2, B_3, -B_4)$ , конечное положение — поворотом на угол  $\varphi_t = 2 \arccos \lambda_0$  вокруг оси  $l_t = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ . Тогда в формуле (2.4)

$$\begin{aligned} M_k &= -M_1 \bar{\Lambda} \circ e_1 \circ \Lambda = -M_1 (\lambda_0^2 + \lambda_1^2 - \lambda_2^2 - \lambda_3^2, 2\lambda_1 \lambda_2 - 2\lambda_0 \lambda_3, 2\lambda_0 \lambda_2 + 2\lambda_1 \lambda_3) = \\ &= -M_1(t) (B_1^2 + B_2^2 - B_3^2 - B_4^2, 2B_1 B_4 - 2B_2 B_3, 2B_1 B_3 + 2B_2 B_4). \end{aligned} \quad (4.3)$$

Формула (4.3) показывает, что ось  $O'X'$  сохраняет свое положение относительно неподвижных осей. Согласно формуле (3.1), сила трения  $F$  действует в постоянном направлении, ортогональном  $M_k$ . Подведем итог.

**Предложение 2.** *Если включен только один из двигателей, то ось соответствующего колеса сохраняет направление в абсолютных осях, причем центр шара движется прямолинейно перпендикулярно этой оси. В вырожденном случае, когда ось колеса вертикальна, центр шара остается неподвижным.*

## 5. Пропорциональное управление

Обобщение случая, рассмотренного в предыдущем разделе, — это пропорциональный закон управления

$$M_2(t) = \chi M_1(t), \quad \chi \in \mathbb{R}. \quad (5.1)$$

В этом случае вследствие (2.7) получаем

$$q(t) = \chi p(t).$$

Уравнение (2.5) принимает вид

$$\begin{aligned} 2\dot{\lambda}_0 &= -(\lambda_1 + \chi\lambda_2)p, & 2\dot{\lambda}_1 &= (\lambda_0 + \chi\lambda_3)p, \\ 2\dot{\lambda}_2 &= -(\lambda_3 - \chi\lambda_0)p, & 2\dot{\lambda}_3 &= (\lambda_2 - \chi\lambda_1)p. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Для исследования системы (5.2) удобно ввести новые переменные по формулам

$$\begin{aligned} \lambda_0^* &= \lambda_0, & \lambda_1^* &= \lambda_1 \cos \varphi + \lambda_2 \sin \varphi, & \lambda_2^* &= \lambda_2 \cos \varphi - \lambda_1 \sin \varphi, & \lambda_3^* &= \lambda_3, \\ \cos \varphi &= \frac{1}{D}, & \sin \varphi &= \frac{\chi}{D}, & D &= \sqrt{\chi^2 + 1}. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Переменные  $\lambda_j^*$  — это компоненты кватерниона, задающего конечный поворот, переводящий оси  $OXYZ$  в оси вспомогательной системы  $OX''Y''Z''$ , получаемой из  $OX'Y'Z'$  поворотом вокруг оси аппликат на угол  $\varphi$ . Подставляя формулы (5.3) в уравнения (5.2), получим систему

$$2\dot{\lambda}_0^* = -Dp\lambda_1^*, \quad 2\dot{\lambda}_1^* = Dp\lambda_0^*, \quad 2\dot{\lambda}_2^* = -Dp\lambda_3^*, \quad 2\dot{\lambda}_3^* = Dp\lambda_2^*. \quad (5.4)$$

Уравнения (5.4) отличаются от (4.1) лишь множителем  $D$ , который можно учесть при введении переменной  $\tau$  в формулах (4.2) как коэффициент перед интегралом. В итоге получаем следующее утверждение.

**Предложение 3.** *В случае согласованной работы двигателей в соответствии с формулой (5.1) вспомогательная ось  $OX''$  сохраняет направление в абсолютных осях, причем центр шара движется прямолинейно перпендикулярно этой оси. В вырожденном случае (ось  $OX''$  вертикальна) центр шара остается неподвижным.*

## 6. Разгон по прямой

Будем считать, что в начальный момент система покоится, и требуется разогнать шар в определенном направлении. Допустим вначале, что ось внутреннего тела  $C_1C_2$  не горизонтальна (невыврожденный случай). Тогда экваториальная плоскость тела  $O'X'Y'$  не будет

вертикальной, и в ней можно выбрать направление, перпендикулярное предписанному направлению движения шара. Это направление  $OX''$  выбираем для приложения момента по формулам (5.1), (5.3). Согласно предложению 3, эта ось сохраняет направление в абсолютном пространстве, а центр шара движется вдоль прямой, ортогональной к  $OX''$ .

В статье [13] исследован разгон вдоль прямой шара, несущего маятник. В этом случае центр масс системы не совпадает с геометрическим центром шара, что существенно усложняет динамику. Рассматриваемая здесь кинематическая схема не совпадает по сути с уравновешенным маятником: здесь движение шара в заданном направлении обеспечивается управляющим моментом с ненулевой вертикальной составляющей. Действительно,

$$M_k = DM_1(t)e'', \quad e'' = \frac{e_1 + \chi e_2}{D}, \quad (6.1)$$

где  $e''$  — орт оси  $OX''$ . Согласно формулам (2.3), (3.1) и (6.1), получаем

$$\dot{v} = \frac{DM_1(t)e'' \times k}{(2m + m_s)R}. \quad (6.2)$$

Следовательно, скорость центра шара определяется квадратурой.

В вырожденном случае, когда ось  $C_1C_2$  горизонтальна, вектор  $e''$  при любом выборе параметра  $\chi$  лежит в фиксированной (экваториальной) вертикальной плоскости. При этом начальное движение шара возможно лишь в направлении  $C_1C_2$ . Возможное решение проблемы: вначале изменить положение оси тела за счет работы одного из двигателей «на малой тяге», так что трение качения (в данной модели не учитывалось) препятствует смещению шара.

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Полученные выше выводы о прямолинейности траектории шара в случае наличия у его угловой скорости вертикальной составляющей основаны на предположении, что контакт между ним и опорой осуществляется в единственной точке. Если учесть конечные размеры площадки контакта, то траектория будет искривляться по аналогии с траекторией бильярдного шара, к которому приложен боковой «винт».

В реальных условиях в начальный момент шар может покоиться в «ямке», и для начала его движения мощности моторов не хватает. Такая ситуация наблюдалась при экспериментах устройства, управляемого при помощи роторов [6, 18]. В этом случае можно использовать идею накопления кинетического момента внутренним телом с последующей импульсивной передачей его корпусу. Данная идея была реализована для приведения в движение тел кубической формы [21, 22]. Вначале тело  $S$  разгоняется по закону (5.1) в направлении предполагаемого движения; при этом корпус остается неподвижным. Затем следует резкая блокировка колес, в результате чего накопленный кинетический момент сдвигает устройство.

## 7. Обсуждение и выводы

Функционирование рассмотренного устройства основано на движении внутреннего тела относительно сферического корпуса без смещения центра масс системы. Такая кинематическая схема обеспечивает равномерное прямолинейное движение по инерции после разгонной фазы, в отличие от устройств типа «белка в колесе», для поддержки движения которых требуется непрерывная работа двигателя во избежание перехода в режим периодического торможения и ускорения.



Показано, что для управления положением центра шара  $O'$  достаточно пары приводов с омниколесами, оси которых взаимно перпендикулярны. Для перевода этой точки из одного положения в другое в невырожденном случае (когда ось крепления колес не горизонтальна) достаточно одного прямолинейного отрезка. Если в начальном положении эта ось горизонтальна, то ее положение можно вначале «подправить» за счет работы одного из моторов. В итоге путь может состоять из двух прямолинейных отрезков.

## Список литературы

- [1] Бобылев Д. К. О шаре с гироскопом внутри, катящемся по горизонтальной плоскости без скольжения // Матем. сб., 1892, т. 16, № 3, с. 544–581.
- [2] Жуковский Н. Е. О гироскопическом шаре Д. К. Бобылева // Собр. соч.: Т. 1 / Н. Е. Жуковский. Москва – Ленинград: Гостехиздат, 1948. С. 275–289.
- [3] Ylikorpi T., Suomela J. Ball-shaped robots // Climbing and walking robots: Towards new applications / H. Zhang (Ed.). Vienna: InTech, 2007. P. 235–256. *См. также:* Иликорпи Т., Суомела Ю. Сферические роботы // Мобильные роботы: Робот-колесо и робот-шар / А. В. Борисов, И. С. Мамаев, Ю. Л. Караваев. Москва – Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2013. С. 29–50.
- [4] Easterling J. M. Toy: Patent US № 2 949 696 A (Aug 23, 1960).
- [5] Килин А. А., Караваев Ю. Л., Клековкин А. В. Кинематическая модель управления высокоманевренным мобильным сферороботом с внутренней омниколесной платформой // Нелинейная динамика, 2014, т. 10, № 1, с. 113–126.
- [6] Борисов А. В., Килин А. А., Мамаев И. С. Как управлять шаром Чаплыгина при помощи роторов // Нелинейная динамика, 2012, т. 8, № 2, с. 289–307.
- [7] Bicchi A., Balluchi A., Prattichizzo D., Gorelli A. Introducing the «Sphericle»: An experimental testbed for research and teaching in nonholonomy // Proc. IEEE Internat. Conf. on Robotics and Automation (Albuquerque, N.M., April 21–27, 1997): Vol. 3, pp. 2620–2625.
- [8] Michaud F., Caron S. Roball, the rolling robot // Auton. Robots, 2002, vol. 12, pp. 211–222.
- [9] Kabała M., Wnuk M. Design and construction of RoBall, a spherical, nonholonomic mobile robot: Raport serii PRE nr 48/2004. Wrocław: Instytut Cybernetyki Technicznej, 2004. 18 pp.
- [10] Mukherjee R., Minor M. A., Pukrushpan J. T. Simple motion planning strategies for spherobot: a spherical mobile robot // Proc. of the 38th IEEE Conf. on Decision and Control (Phoenix, Ariz., Dec 1999): Vol. 3, pp. 2132–2137.
- [11] Javadi A., Mojab P. Introducing glory: A novel strategy for an omnidirectional spherical rolling robot // J. Dyn. Syst. Meas. Control Trans. ASME, 2004, vol. 126, no. 3, pp. 678–683.
- [12] Alves J., Dias J. Design and control of a spherical mobile robot // J. Syst. Control Eng., 2003, vol. 217, pp. 457–467.
- [13] Иванова Т. Б., Пивоварова Е. Н. Динамика и управление сферическим роботом с осесимметричным маятниковым приводом // Нелинейная динамика, 2013, т. 9, № 3, с. 507–520.
- [14] Halme A., Schonberg T., Wang Y. Motion control of a spherical mobile robot // Proc. of the 4th IEEE Internat. Workshop on Advanced Motion Control (Mie, Japan, 1996): Vol. 1, pp. 259–264.
- [15] Bhattacharya S., Agrawal S. Spherical rolling robot: A design and motion planning studies // IEEE Trans. Robot. Autom., 2000, vol. 16, no. 6, pp. 835–839.
- [16] Jia Q., Zheng Y., Sun H., Cao H., Li H. Motion control of a novel spherical robot equipped with a flywheel // ICIA'09: Internat. Conf. on Information and Automation (Zhuhai, Macau, 2009), pp. 893–898.
- [17] Schroll G. C. Design of a spherical vehicle with flywheel momentum storage for high torque capabilities: Dissertation (bachelor of science), Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Mass., 2008.



- [18] Борисов А. В., Килин А. А., Мамаев И. С. Как управлять шаром Чаплыгина при помощи роторов: 2 // Нелинейная динамика, 2013, т. 9, № 1, с. 59–76.
- [19] Joshi V. A., Banavar R. N. Motion analysis of a spherical mobile robot // Robotica, 2009, vol. 27, no. 3, pp. 343–353.
- [20] Sugiyama Y., Hirai S. Crawling and jumping by a deformable robot // Int. J. Robot. Res., 2006, vol. 25, pp. 603–620.
- [21] <http://habrahabr.ru/post/196570/> (2013).
- [22] Ivanov A. P. On the impulsive dynamics of M-blocks // Regul. Chaotic Dyn., 2014, vol. 19, no. 2, pp. 214–225.
- [23] Бранец В. Н., Шмыглевский И. П. Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. Москва: Наука, 1973. 320 с.
- [24] Маркеев А. П. Движение твердого тела, соприкасающегося с твердой поверхностью. 2-е изд. Москва – Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2014. 496 с.
- [25] Chen W.-H., Chen Ch.-P., Yu W.-Sh., Lin Ch.-H., Lin P.-Ch. Design and implementation of an omnidirectional spherical robot Omnicron // Proc. of the 2012 IEEE/ASME Internat. Conf. on Advanced Intelligent Mechatronics (Kachsiung, Taiwan, July 11–14, 2012), pp. 719–724. См. также: Чэнь В.-Х., Чэнь Ч.-П., Юй В.-Ш., Линь Ч.-Х., Линь П.-Ч. Конструкция и реализация омнинаправленного сферического робота Omnicron // Мобильные роботы: Робот-колесо и робот-шар / А. В. Борисов, И. С. Мамаев, Ю. Л. Караваев. Москва – Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2013. С. 81–93.
- [26] Svinin M., Morinaga A., Yamamoto M. An analysis of the motion planning problem for a spherical rolling robot driven by internal rotors // IEEE/RSJ Internat. Conf. on Intelligent Robots and Systems (Vilamoura-Algarve, Portugal, Oct 7–12, 2012), pp. 414–419.

## On the control of a robot-ball using two omni-wheels

Alexander P. Ivanov

Moscow Institute of Physics and Technology  
 Institutskii per. 9, Dolgoprudnyi, 141700, Russia  
[apivanov@orc.ru](mailto:apivanov@orc.ru)

We discuss the dynamics of balanced body of spherical shape on a rough plane, managed by the movement of the built-in shell. These two shells are set in relative motion due to rotation of the two symmetrical omni-wheels. It is shown that the ball can be moved to any point on the plane along a straight or (in the case of the initial degeneration) polygonal line. Moreover, any prescribed curvilinear trajectory of the ball center can be followed by appropriate control strategy as far as the diameter, connecting both wheels, is non-vertical.

MSC 2010: 37J60, 37J35, 70E18, 70F25, 70H45

Keywords: robot-ball, omni-wheel, control of motion

Received March 05, 2015, accepted March 26, 2015

Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2015, vol. 11, no. 2, pp. 319–327 (Russian)